Logarithmisch-quadratischer Rechenstab

Vom vereid. Landmesser und Eisenbahnamtmann Seifert, Saarbrücken.

In fast allen technischen Berufen ist der Rechenschieber ein unentbehrliches Hilfsmittel geworden. Dass er im Vermessungsfach eine stiefmütterliche Rolle spielt, liegt an zwei Hauptursachen: Einmal liefert der gewöhnliche handliche Schieber zu ungenaue Resultate; z.B. sind Multiplikationen von 3 und 4 stelligen Zahlen, wie sie meist bei Flächen- und Polygonpunktsberechnungen vorkommen, mit der erforderlichen Genauigkeit nicht zu erreichen. Zweitens fehlt eine geeignete Teilung zur direkten Auswertung des Pythagorassatzes. Wie wichtig gerade dieser zweite Umstand ist, beweisen zahlreiche Erfindungen, von denen mir auch drei Spezialschieber bekannt sind, die sich aber nicht bewährt haben, da unter anderm das Resultat zu umständlich gefunden wird. Obige beide Bedingungen werden nun durch folgenden Rechenstab erfüllt, da erstens seine Teilungen 5 mal so lang sind, wie die obere Teilung des gewöhnlichen Schiebers, was einer ebenso grossen Genauigkeit entspricht, und zweitens, weil eine besondere Teilung vorhanden ist, mit der eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks nach einmaliger Einstellung der beiden andern direkt mit hinreichender Genauigkeit abgelesen wird, wodurch Fehlerquellen auf das geringst mögliche Mass beschränkt bleiben. Er ist 35 cm lang, passt bequem in die Aktenmappe und ist daher nicht unhandlicher als die gewöhnlichen Schieber. Er hat drei verschiedene Teilungen:

1 logarithmische zum Multiplizieren u. dergl.,
1 quadratische zur Auswertung des Pythagorassatzes,
1 sinus- und cosinus- Teilung auf der Rückseite der Zunge, besonders geeignet zur Berechnung von Polygonzügen.

Sämtliche Skalen haben eine Teilungslänge von 625 mm und sind 1 mal zerlegt. Zum Unterschied von dem ebenfalls 1 mal zerlegten logarithmischen Rechenschieber von Dr. Frank (Z.f.V. 1903 S. 401 - 405) sind die beiden zerlegten Teile bei allen drei Teilungen unmittelbar untereinander angeordnet, was den Vorteil bietet, dass das Resultat stets nur auf einer Gleitlinie zu finden ist. Als weitere Neuheit ist die Anwendbarkeit des Frank'schen Prinzips auf die quadratische Teilung zu betrachten, die aber erst durch Verwendung einer 3 fachen Bezifferung (Fig. IV) die für die Praxis nötige Genauigkeit erzielt. Diese Bezifferung ist derart, dass für Hypotenusenlängen von 10 - 25 bezw. 100 - 250 m die grossen Zahlen, von 25 - 50 bezw. 250 - 500 m die eingeklammerten und von 50 - 100, bezw. 500 - 1000, bezw. 0 - 10 m die kleinen Zahlen gelten. Denn jedes Intervall der 25ger Teilung ist 4 mal grösser als dasselbe der 50ger und 16

mal grösser als dasselbe der 100er Teilung. Die sinus und cosinus Teilung ist doppelt beziffert gemäss dem Prinzip dieses Stabes, das Resultat ohne Zwischenrechnung direkt zu finden. Die Zunge ist gegenstimmig angeordnet, hauptsächlich weil dadurch bei den am meisten vorkommenden Rechenarten, der Multiplikation und der Auffindung der Hypotenuse, eine Fehlstellung der Zunge vermieden und ausserdem eine Reziprokentabelle geschaffen wird. Die fehlenden Werte der sinus von 0º - 6º bezw cosinus von 84º - 90º sind auf der Rückseite des Stabes, wo ausserdem noch viel Platz für sonstige Tabellen und Formeln vorhanden ist, in einer kleinen Tabelle angeordnet. Ausserdem können an den beiden abgeschrägten Längskanten vier Anlegemassstäbe angebracht werden, z.B. 1:500, 1:1000, 1:625, 1:1250. Der Glassläufer ist zwecks besserer Uebersicht auf zwei Seiten nicht eingefasst nach Art des "Dennert'schen Freiblickes".

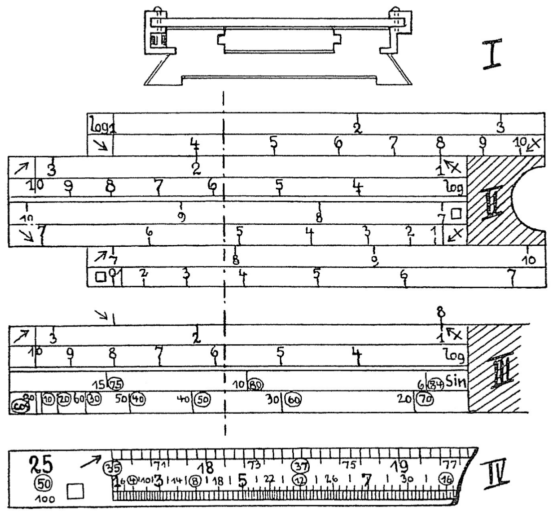

Fig I ist Querschnitt,
Fig II schematische Vorderseite des ganzen Stabes,
Fig III schematische Rückseite der Zunge,
Fig IV wirkliche Teilansicht der quadratischen Teilung.
Die strichpunktierte Linie ist Visierlinie des Glasläufers.
Beispiele nach Fig II und III:

A ist Einstellung auf Lineal mit Glasläufer,
B ist Einstellung mit Zunge auf Glasläufer.

A.		B.		
$\underline{43{,}04}$	·	$\overline{18{,}56}$	=	798,8
$\sqrt{\underline{36{,}59^2} + \underline{51{,}82^2}}$			=	63,44
$\overline{136{,}1}$	·	$\overline{\sin 10^\circ 42'}$	=	25,26
$\overline{13{,}61}$	·	$\underline{\cos 54^\circ 4'}$	=	7,988

Aus den Beispielen nach der schematischen Zeichnung ist die bei allen drei Teilungen gleichlautende Rechenregel zu ersehen:

Produkt oder Hypotenuse ablesen bei $\longrightarrow$ (links), wenn Einstellungen entweder über oder unterm Strich, und bei $+\!\!\longrightarrow$ (rechts), wenn Einstellungen über und (+ Zeichen bei Pfeil!) unterm Strich. Über oder unterm Strich heisst, wenn die zur betr. Skala gehörige Zahl über oder unter dieser steht. Andere Rechenarten sinngemäss!

Die Genauigkeit der logarithmischen Teilung ergibt sich aus Folgendem: Von 1 bis 2 ist die 4. Stelle auf 5 Einheiten, von 2 bis 5 auf 10 Einheiten und von 5 bis 10 auf 20 Einheiten direkt angegeben. Schätzungsfehler also ± 1, ± 2 und ± 3 der 4. Stelle.

Der Genauigkeitsgrad der quadratischen ist der Art, dass die Hypotenusenlänge von 0 bis 10 m auf 2 cm, von 10 bis 25 m auf 5 cm, von 25 bis 50 m auf 10 cm und von 50 bis 100 m auf 20 cm direkt, d.h. ohne Schätzung abgelesen wird. Schätzungsfehler wie oben: fallen gegenüber der Ungenauigkeit der Messung nicht ins Gewicht. Bei der Winkelfunktionsteilung ist der sinus von 5º 30' bis 15º auf 2', von 15º bis 30º auf 5', von 30º bis 50º auf 10', von 50º bis 70º auf 20', von 70º bis 80º auf 30', von 80º bis 85º auf 1º und von 85º bis 90º auf 5º direkt Angegeben. *tg* und *ctg* wird aus $\frac{\sin}{\cos}$ bezw $\frac{\sin}{\cos}$ mit dem Stab gefunden.

Um die Genauigkeit, die man mit dem vorbeschriebenen Rechenschieber erzielen kann, überschläglich festzustellen, sei der mittlere lineare Schätzungsfehler bei einer ablesung oder Einstellung zu 0,05 mm angenommen. Dieser Wert kann bei präziser Ausführung des Instrumentes und bei einiger Sorgfalt im Gebrauch leicht eingehalten wurden. Weiter sei angenommen, dass dieser lineare Fehler an allen stellen der Teilung der gleiche ist. Dann ergibt sich bei der logarithmischen Teilung der mittlere Gesamtfehler eines aus zwei Argumenten berechneten Wertes, in ‰ ausgedrückt, zu $\frac{0{,}05 \cdot 1000\sqrt{3}}{625 \cdot Mod.} = 0{,}32‰$.

Dass die Genauigkeit auch für Flächenberechnungen ausreicht, ergibt sich aus nebenstehender Tabelle. In Spalte 2 sind die mittleren Fehler der Schieberresultate, in Spalte 3 der mittlere Fehler einer Flächenberechnung, die sich aus den Höchstfehler der Katasteranweisung nach der Formel $\mu a = \frac{d}{3\sqrt{2}}$ herleiten, angegeben.

Ablesung a qm	m a qm	µ a qm
500	0,16	4,0
1.000	0,32	5,8
2.000	0,64	8,2
4.000	1,28	11,6
6.000	1,92	14,3
8.000	2,56	16,5
10.000	3,20	18,6

Grössere Fehler kommen nicht vor, da bei Faktoren über 100 m das Produkt leicht zerlegt werden kann.

Auch für Berechnung von Polygonzügen wird die Genauigkeit meist ausreichen, zumal bei proportionaler Verteilung des Abschlussfehlers die Rechenfehler ebenso wie die Messungsfehler eliminiert werden. Bei der quadratischen Teilung wird der Fehler mit wachsender Ablesung kleiner; da die Intervalle dieser Teilung im Gegensatz zur logarithmischen Teilung wachsen. Durch Differentiation der Gleichung $x = \frac{a^2 \cdot 625}{z^2}$, in der *x* die der Ablesung *a* entsprechende Schieberlänge und *z* die jeweilige Endziffer (25; 50 oder 100) bedeuten, ergibt sich für einen aus zwei Argumenten bezeichneten Wert: $x = \frac{z^2\sqrt{3}}{2a \cdot 625} \cdot m_x$. Mit der obigen Annahme m_x = 0,05 mm ist hiernach untenstehende Tabelle berechnet. Man sieht, dass die in Spalte 4 eingetragenen relativen Fehler nur an einer Stelle (bei 10) ungünstiger sind, als bei der logarithmischen Teilung. Zum vergleiche sind in Spalte 5 die mittleren Fehler einer Längenmessung in Gelände I, die sich aus den Höchstfehlern der Katasteranweisung nach der Formel $\mu_a = \frac{d}{4\sqrt{2}}$ ergeben,

Teilung *z*	Ablesung *a* m	*m a* cm	*m a* ‰	*µ a* cm
25	10	0,43	0,43	1,2
	15	0,29	0,19	1,4
	20	0,22	0,11	1,6
	25	0,17	0,07	1,8
50	25	0,69	0,28	1,8
	30	0,58	0,19	2,0
	40	0,43	0,11	2,3
	50	0,35	0,07	2,6

Seifert. Logarithmisch-quadratischer Rechenstab
Zeitschrift für Vermessungswesen 1924.

100	50	1,4	0,28	2,6
	60	1,10	0,19	2,8
	80	0,87	0,11	3,1
	100	0,70	0,07	3,7

eingetragen. Man sieht hier sowohl, wie auch bei der logarithmischen Teilung, dass die mittleren Rechenfehler selbst in ungünstigen Fällen nur einen kleinen Bruchteil der mittleren Messungsfehler ausmachen.

Der durch den Charakter der quadratischen Teilung bedingte Umstand, dass die mittleren Fehler mit wachsender Ablesung kleiner werden, war auch der Grund, weshalb bei den grösseren Intervallen am Ende der Teilung von einer weiteren Unterteilung abgesehen wurde. Dadurch werden zwar die Fehler etwas langsamer abnehmen, als in der Tabelle angegeben, aber die Einheitlichkeit und Uebersichtlichkeit der Teilung wird erhöht.

Wie bei dem gewöhnlichen Rechenschieber lassen sich natürlich auch bei diesem Stab Ausdrücke von der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ ohne Zwischenablesung mit der logarithmischen Teilung feststellen und analog mit der quadratischen $a^2 + b^2 - c^2$, sofern man das Zwischenresultat $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ mit der logarithmischen Teilung quadriert. Bei der Berechnung der Höhe und des Höhenfusspunktes in einem Dreieck nach der Formel $p = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ sind auf diese Weise und durch den abwechselnden Gebrauch der logarithmischen und der quadratischen Teilung für die gesuchten drei Stücke auch nur drei Ablesungen erforderlich nebst eine als Probe der Richtigkeit. Besonders auch bei Kleinpunkts-, Koordinaten-umformungs-, Polygonzugsberechnungen usw kommt der Vorteil des abwechselnden Gebrauchs der Teilungen zur Geltung. Die besten Dienste aber leistet der neue Stab dadurch, dass er durch die schnelle und sichere Kontrolle rechter Winkel die Feldarbeiten wesentlich verringert.

Aus Vorstehendem geht hervor, dass dieser Stab besonders für vermessungstechnische Arbeiten hervorragend geeignet ist, weil er die mühsamen mechanischen Rechnungen schnell, sicher und, was die Hauptsache ist, mit hinreichender Genauigkeit bewerkstelligt. Selbstredend wird sich aber auch jeder Andere, der praktische Rechnungen im Zusammenhang mit dem Pythagorassatz und mit Winkelfunktionen auszuführen hat, die erwähnten Vorteile zu Nutze machen.